МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

УТВЕРЖДЕНА

приказом и.о. директора

ИМ СО РАН

от «27» 04 2022 г. № 14-ас

ПРОГРАММА
экзамена по специальной дисциплине для поступающих в аспирантуру Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Новосибирск - 2022

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

1. Математический анализ

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Основные теоремы дифференциального исчисления. (теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора)

Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина; Остроградского, Стокса).

2. Основы функционально анализа

Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств).

Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова).

Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини.

Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса.

Основные нормированные пространства. Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости.

Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса - Фишера. Ряды и интегралы Фурье.

Элементы теории линейных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема Хана - Банаха. Теорема Фредгольма для вполне непрерывных операторов.

Линейные функционалы. Теорема Банаха - Штейнгауза. Теорема Рисса о представлении.

Теоремы о неподвижной точке. Принцип Банаха, принцип Шаудера.

3. Основы теории функций комплексного переменного

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.

Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.

Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения.

Принцип аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей. Формула Кристофера - Шварца.

Предельные значения интеграла типа Коши (формула Сохоцкого - Племеля). Восстановление функций аналитической функции по ее вещественной части на окружности (формула Шварца). Решение задачи Дирихле для круга (формула Пуассона).

ЛИТЕРАТУРА

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3.
Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.
Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения и нормальной системы. Зависимость решения от начальных условий и от параметров.

2. *Общая теория линейных систем*

Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейной однородной системы. Построение общего решения. Неоднородные линейные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Линейное уравнение «n-го порядка. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

3. *Теория устойчивости*

Теорема Ляпунова об устойчивости. Теоремы о неустойчивости. Устойчивость по первому приближению. Понятие о краевых задачах для уравнения второго порядка. Собственные числа. Собственные функции. Функция Грина.

ЛИТЕРАТУРА

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

АЛГЕБРА

1. *Основные понятия алгебры*

Алгебраические системы. Изоморфизм. Группа. Кольцо. Поле. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Кольцо матриц. Группа подстановок.

2. *Теория определителей*

Определитель квадратной матрицы и его простейшие свойства. Поведение определителя при транспонировании матрицы, элементарных преобразованиях системы строк и столбцов матрицы и умножении матриц. Разложение определителя по строке, критерий обратимости и формула для обратной матрицы. Решение крамеровых систем линейных уравнений.

3. *Векторные пространства*

База и ранг системы векторов. Изоморфизм любого конечномерного пространства некоторому пространству строк. Преобразование координат вектора при смене базы пространства. Фактор-пространство. Размерность суммы, пересечения подпространств, фактор-пространства.

4. *Системы линейных уравнений*

Теорема о ранге для матриц. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных уравнений (определение и отыскание). Однородные системы (пространство решений, фундаментальные системы решений).

5.*Многочлены*

Делимость многочленов (алгоритм деления с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида). Разложение на неприводимые множители. Корни и значения (теорема Безу, формула Тейлора, интерполяционный многочлен). Основная теорема о комплексных числах.

6.Линейные преобразования векторных пространств

Изоморфизм с алгеброй матриц. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования. Невырожденные преобразования. Инвариантность пространства.

7.Жорданова форма матриц

8.Евклидовы и унитарные пространства

Процесс ортогонализации, изоморфизм евклидовых (унитарных) пространств. Ортогональные и симметрические преобразования.

9.Квадратичные формы

Поведение матриц квадратичной формы при линейной замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции действительной квадратичной формы. Положительно определенные формы.

ЛИТЕРАТУРА

Курош А. Г. "Курс высшей алгебры". М.: Наука, 1971.
Мальцев А. И. "Основы линейной алгебры". М.: Наука, 1970.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Афинные и ортонормальные системы координат

Формулы замены координат. Вычисление скалярных произведений, длин отрезков и углов.

2. Геометрические основы теории определений

Одинаково и противоположно ориентированные реперы, ориентация пространства. Вычисление объема параллелепипеда, построенного по реперу, через координаты составляющих векторов. Геометрический смысл детерминанта матрицы Грамма. Векторное и смешанное произведение в 3-мерном ориентированном евклидовом пространстве.

3. Афинные подпространства

Задание афинного подпространства параметрическим уравнением и системой уравнений. Определение взаимного расположения, расстояний и углов по коэффициентам уравнений.

4.Афинные и ортогональные отображения

Связь афинных отображений с системами линейных уравнений. Существование и единственность афинного отображения, имеющего заданные значения в заданных точках. Афинные свойства фигур (прямолинейность, выпуклость, связность и т.п.). Инвариантные подпространства афинных и ортогональных преобразований.

5.Линии и поверхности 2-го порядка

Алгебраические поверхности. Пересечение алгебраической поверхности с прямой, условие касания. Линия второго порядка (фокусы, асимптоты, оптические свойства). Строение поверхностей 2-го порядка. Алгоритмы отыскания канонического уравнения и главных осей поверхности, заданной общим уравнением 2-й степени. Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) для определения афинного типа поверхности 2-го порядка.

6.Теория кривых

Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль. Кручение кривой. Теорема о задании кривой натуральными уравнениями.

7.Теория поверхности

Первая и вторая квадратичная форма. Универсальная связь между первой и второй квадратичными формами поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхностей и ее многомерном обобщении (римановой геометрии).

ЛИТЕРАТУРА

Погорелов А.В.   Аналитическая геометрия
Погорелов А.В.   Дифференциальная геометрия.